

PLNE pour le RCPSP : Une formulation basée sur les événements et comparaisons expérimentales

Koné Oumar (okone@laas.fr)

Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes, **LAAS-CNRS**.

Christian Artigues (artigues@laas.fr)

Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes, **LAAS-CNRS**.

Pierre Lopez (lopez@laas.fr)

Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes, **LAAS-CNRS**.

Marcel Mongeau (mongeau@math.univ-toulouse.fr)

Institut de Mathématiques, Université de Toulouse, UPS.

PLNE pour le RCPSP : Une formulation basée sur les événements et comparaisons expérimentales

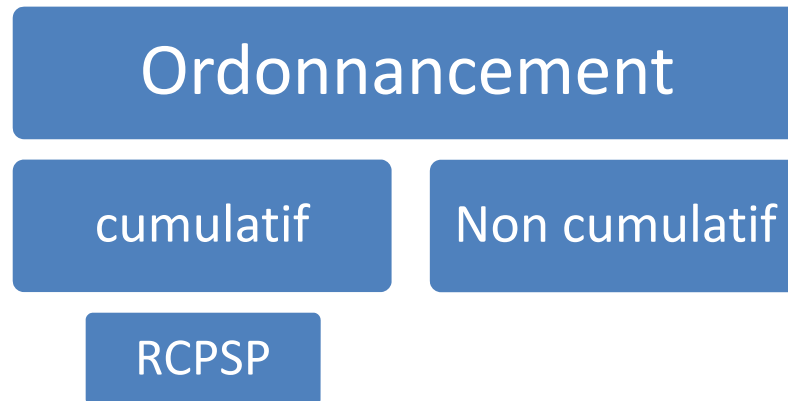
PLAN DE LA PRESENTATION

1. Introduction – Définition du RCPSP
2. Formulations PLNE du RCPSP
3. Formulation basée sur les événements
4. Tests
5. Résultats
6. Conclusion
7. Perspectives

Introduction - Définition RCPSP

RCPSP : « Resource-Constrained Project Scheduling Problem »

- Problème d'ordonnancement cumulatif
- Un des plus étudiés
- Grand nombre d'applications dans l'industrie.
- Couvre un grand nombre des problèmes théoriques d'ordonnancement.



Introduction - Définition RCPSP

Données

- n : Nombre de tâches;
- T : Ensemble $\{1, \dots, n\}$ de tâches;
- p_i : Durée de la tâche i ;
- E : Ensemble de précédence : $(i, j) \in E$ avec i et $j \in T \Rightarrow$ la tâche i précède la tâche j ;
- K : Nombre de ressources;
- R : Ensemble $\{1, \dots, K\}$ de ressources;
- R_k : Capacité de la ressource k , constante sur H ;
- H : Horizon d'ordonnancement du projet;
- r_{ik} : Consommation de la tâche i sur la ressource k .

Objectif & Contraintes

- \Rightarrow Minimiser la durée totale du projets (C_{max}) sous :
 - Contraintes de précédences;
 - Contraintes de ressources.

Formulation Conceptuelle

RCPSP : formulation

- **Variables de décision**

S_i : date de début d'exécution de la tâche i , avec $S_0 = 0$;

- **minimiser C_{max}** (1)

Sous

$$C_{max} \geq S_i + p_i \quad \forall i \in T \quad (2)$$

$$S_j \geq S_i + p_i \quad \forall (i, j) \in E \quad (3) \quad (\text{Contraintes de précédences})$$

$$\sum_{i \in P(t)} r_{ik} \leq R_k \quad \forall t=0, \dots, H-1 \quad k \in R \quad (4) \quad (\text{Contraintes cumulatives})$$

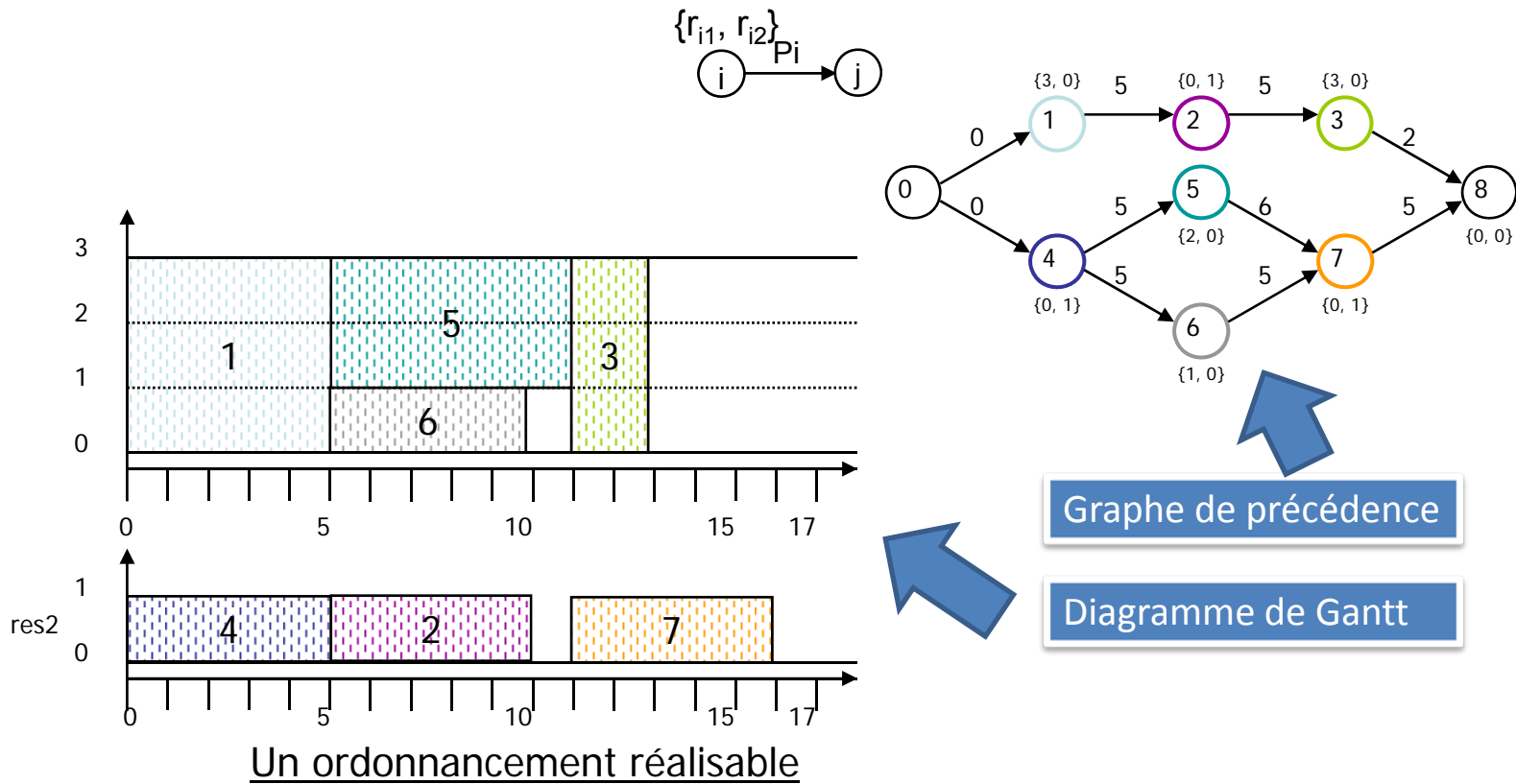
$$S_i \geq 0 \quad \forall i \in T \quad (5)$$

Avec $P(t) = \{ i \mid S_i \leq t < S_i + p_i \}$

- Le RCPSP est NP- difficile au sens fort ($P(t)$ difficilement identifiable)

Introduction - Définition RCPSP

Exemple de problème de RCPSP



Introduction - Définition RCPSP

Méthodes de résolution

- Calculs de bornes inférieures,
- Méthodes de résolution exacte,
- Méthodes de résolution approchée.

Techniques utilisées

- Programmation Linéaire en Nombres Entiers,
- Programmation Par Contraintes ,
- Branch and Bound,
- Relaxation Lagrangienne,
- Etc.

Pas de méthode exacte permettant de résoudre des problèmes de plus de 60 tâches

Formulations PLNE

Formulation de Pritsker (1969)

x_{it} : variable binaire de décision

$x_{it} = 1$ si i démarre à t sinon 0

Remarque : $S_i = \sum_t t x_{it}$

$$\min \sum_t t x_{nt} \quad (6)$$

$$\sum_t t x_{jt} \geq \sum_t t x_{it} + p_i \quad \forall (i, j) \in E \quad (7)$$

$$\sum_i r_{ik} \sum_{\tau > t - p_i}^t x_{i\tau} \leq R_k \quad \forall t \in H, \forall k \in R \quad (8)$$

$$\sum_t x_{it} = 1 \quad \forall i \in T \quad (9)$$

$$x_{it} \in \{0,1\} \quad \forall i \in T, \forall t \in H \quad (10)$$

Nombre de variables binaires : $n(H+1)$

Nombre de contraintes : $(H+1)(K + n) + \text{Dim}(E) + n$

Formulations PLNE

Formulation de Christofides (1987)

x_{it} : variable binaire de décision

$x_{it} = 1$ si i démarre à t sinon 0

Si $i \geq t \Rightarrow S_j \geq t + p_i$

$$\min \sum_t t x_{nt} \quad (6)$$

$$\sum_{\tau \geq t} x_{i\tau} + \sum_{\tau < t + p_i} x_{j\tau} \leq 1 \quad \forall t \in H, \forall (i, j) \in E \quad (11)$$

$$\sum_i r_{ik} \sum_{\tau > t - p_i}^t x_{i\tau} \leq R_k \quad \forall t \in H, \forall k \in R \quad (8)$$

$$\sum_t x_{it} = 1 \quad \forall i \in T \quad (9)$$

$$x_{it} \in \{0,1\} \quad \forall i \in T, \forall t \in H \quad (10)$$

Nombre de variables binaires : $n(H+1)$

Nombre de contraintes : $(H+1)(\text{Dim}(E) + K + n) + n$

Formulations PLNE

Formulation Basée sur les Flots (Flots) (Artigues et al. 2003)

$x_{ij} = 1$ si l'activité i précède l'activité j , 0 sinon

f_{ijk} : Nombre de ressource k libérées par i et envoyées à j au début de son exécution

S_i : Date début de i

f_{ijk} : variables de flots

$$\min S_n \quad (12)$$

$$x_{ij} = 1 \quad \forall (i, j) \in E \quad (13)$$

$$x_{ij} + x_{ji} \leq 1 \quad \forall (i, j) \in T^2, i < j \quad (14)$$

$$x_{ik} \geq x_{ij} + x_{jk} - 1 \quad \forall (i, j, k) \in T^3 \quad (15)$$

$$S_j - S_i \geq -M + (p_i + M)x_{ij} \quad \forall (i, j) \in T^2 \quad (16)$$

$$f_{ijk} \leq \min(r_{ik}, r_{jk})x_{ij} \quad \forall (i, j) \in T^2, \forall k \in R \quad (17)$$

$$\sum_{j \in T} f_{ijk} = r_{ik} \quad \forall i \in T, \forall k \in R \quad (18)$$

$$\sum_{i \in T} f_{ijk} = r_{jk} \quad \forall j \in T, \forall k \in R \quad (19)$$

$$f_{ijk} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in T^2, \forall k \in R. \quad (20)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in T^2 \quad (21)$$

$$S_i \geq 0, x_{ii} = 0 \quad \forall i \in T \quad (22)$$

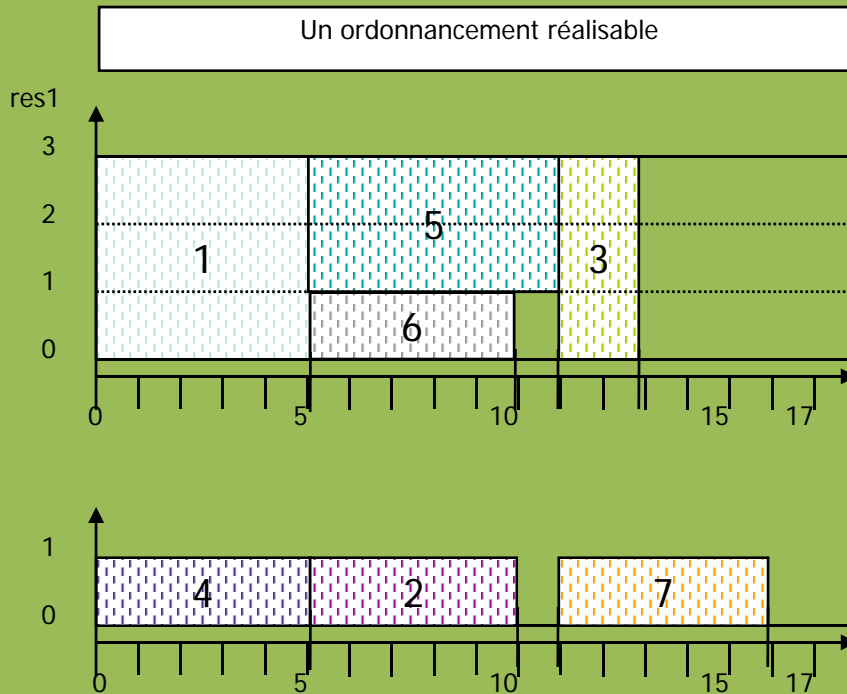
Nombre de variables :
 $n(n+nK+1)$

Nombre de contraintes :
 $2\text{Dim}(E)+n (n^2 + 2 (nK + n + K+1))$

Formulations PLNE

Formulation Basée sur les Evénements (Events)

Formulation Basée sur les événements :
1 événement = début et/ou fin d'une tâche



$$T = 17$$

$$C_{\max} = 16$$

Nombre de tâches $n = 7$

Nombre d'événement $s = N = 6$

Remarque : $N \leq n + 1$

Variables binaires

$x_{ie} = 1$ i débute à e

$y_{if} = 1$ i finit à f

Variables continues

t_e = date de l'événement e

b_{ek} = consommation de la ressource k à l'événement e

Formulations PLNE

Formulation Basée sur les événements (Events)

V : Ensemble des événements.

Variables binaires

$x_{ie} = 1$ i débute à e

$x_{if} = 1$ i finit à f

Variables continues

t_e = date de l'événement e

b_{ek} = consommation de la ressource k à e

Nombre de variables binaires : $N(2n+K+1)$

Nombre de contraintes : $(n+1)(N-1)! + N(\text{Dim}(E) + 2K) + 2n$

$$\min t_n \quad (23)$$

$$t_0 = 0 \quad (24)$$

$$t_f \geq t_e + p_i x_{ie} - p_i(1 - y_{if}), \quad \forall f > e, e \in V, f \in V, i \in T \quad (25)$$

$$t_f \geq t_e, \quad \forall f > e, e \in V, f \in V \quad (26)$$

$$\sum_{e=0}^n x_{ie} = 1, \quad \forall i \in T \quad (27)$$

$$\sum_{e=0}^n y_{ie} = 1, \quad \forall i \in T \quad (28)$$

$$\sum_{e'=e}^n x_{ie} + \sum_{e'=0}^{e-1} x_{ie} \leq 1, \quad \forall (i, j) \in E, \forall e \in V \quad (29)$$

$$b_{0k} = \sum_i r_{ik} x_{i0}, \quad \forall k \in R \quad (30)$$

$$b_{ek} = b_{(e-1)k} + \sum_i r_{ik} x_{ie} - \sum_i r_{ik} y_{ie}, \quad \forall k \in R, \forall e \in V, e > 0 \quad (31)$$

$$b_{ek} \leq B_k, \quad \forall k \in R, \forall e \in V \quad (32)$$

$$t_e \geq 0, b_{ek} \geq 0, x_{ie} \in \{0, 1\}, y_{ie} \in \{0, 1\} \quad (33)$$

C. de liaison
de t_e à x_{ie}

C. de
précédence

C. de
ressource

Instances

- Instances de la PSPLIB (J30) :
 - 30 tâches,
 - Horizon ≤ 130 ,
 - 4 ressources.
- Instances de Baptiste-Le pape (BL) :
 - 20 à 25 tâches,
 - Horizon ≤ 40 ,
 - 3 ressources.
- Instances Flow-Shop Hybride (FH) :
 - 50 à 150 tâches,
 - Horizon ≤ 250 ,
 - 5 à 10 ressources.
- Instances modifiées de la PSPLIB (J20M) :
 - Nombre de tâches réduit à 20,
 - Augmentation de la durée opératoire de 10 tâches choisies,
 - Horizon de temps ≤ 2000 ,
 - 4 ressources.

Configuration logicielle et matérielle :

- Solveur de calcul : Ilog-Cplex,
- configuration de cplex : par défaut,
- Environnement de programmation : Ilog-Concert, C++ ,
- Limite de temps : TL = 500 secondes,
- Machine : PC Dell, XEON 5110 bi-processeur 1.6Ghz, 2GB RAM, Fedora.

Résultats

J30	S. Optimales		S. Réalisables		N.S.
	%	Temps	%	Ecart M.	%
Pritsker	81%	18 s	11%	6%	8%
Christofides	84%	14 s	11%	8%	5%
Events	8%	239 s	3%	2%	89%
Flots	63%	21 s	10%	2%	28%

S. Optimales :
Solutions optimales trouvées

S. Réalisables :
Solutions réalisables trouvées

N.S. : Pas de solution

Temps : Temps moyen de résolution

Ecart M. : Ecart moyen par rapport à la meilleure solution connue

BL	S. Optimales		S. Réalisables		N.S.
	%	Temps	%	Ecart M.	%
Pritsker	97%	12s	3%	3%	0%
Christofides	100%	37s	0%	0%	0%
Events	0%	0s	5%	11%	95%
Flots	3%	245s	13%	5%	84%

Résultats

FH	S. Optimales		S. Réalisables		N.S.
	%	Temps	%	Ecart M.	%
Pritsker	11%	70 s	16%	7%	72%
Christofides	50%	72 s	20%	9%	30%
Events	0%	0 s	0%	0%	100%
Flots	0%	0 s	0%	0%	100%

S. Optimales :
Solutions optimales trouvées

S. Réalisables :
Solutions réalisables trouvées

N.S. : Pas de solution

Temps : Temps moyen de résolution

Ecart M. : Ecart moyen par rapport à la meilleure solution connue

J20M	S. Optimales		S. Réalisables		N.S.
	%	Temps	%	Ecart M.	%
Pritsker	0%	0 s	0%	0%	100%
Christofides	0%	0 s	0%	0%	100%
Events	65%	41 s	5%	9%	30%
Flots	83%	11 s	8%	6%	9%

Conclusions

Instances J30, BL, FH : ($n \geq 20$; $H \ll 1000$)

- Formulation de **Christofides** présente la meilleure performance
- Formulation de **Pritsker** présente de très bonnes performances

Instances J20M : ($n = 20$; $H > 1000$, durées opératoires très disparates)

- La formulation basée sur les **flots** présente la meilleure performance
- La formulation basée sur **événements** présente de bonnes performances
 - Nombre de variables indépendant de l'horizon temps H
 - Nombre de contraintes indépendant de l'horizon temps H
 - ✓ Mémoire stable
 - ✓ Temps de résolution indépendant de l'horizon de temps H

Perspectives

- Renforcer le modèle basé sur les événements en ajoutant des coupes efficaces.
- Expliquer la faible performance du modèle basé sur les événements par rapport au modèle basé sur les flots.
- Hybrider le modèle basé sur les événements avec les autres modèles existants.
- Utiliser le modèle de flots (ou le modèle à événement si on arrive à améliorer ses performances) pour résoudre des problèmes de RCPSP avec :
 - fonctions objectifs non standard,
 - horizon de temps élevé,
 - pour lesquelles il n'existe pas de méthode de résolution spécifique efficace.

Formulations PLNE

FIN
Merci de votre attention